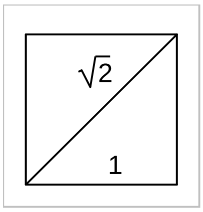
Thème d'étude

Démonstration par l'absurde : $\sqrt{2}$ est irrationnel

On raisonne par l'absurde en supposant le contraire de ce que l'on souhaite prouver et en montrant que l'on arrive nécessairement à une contradiction.



1

La longueur d'un carré de côté 1 est-elle un nombre rationnel ?
Cette question s'est posée aux géomètres grecs, il y a 25 siècles ! (ils ne connaissaient pas le théorème de Pythagore, ni les racines carrées, ou étaient sur le point de justement les découvrir !)

Voilà comment ils procédaient : sur la diagonale du petit carré ABCD de côté 1, on construit un grand carré ACDE.
Si on note d la longueur de la diagonale AC, l'aire du grand carré est alors égale à d^2. Mais ce grand carré possède une aire égale à deux fois celle du petit carré d'où : $d^2 = 2$

Contexte historique :

Pythagore et ses disciples ont découvert le nombre $\sqrt{2}$ au VI ème siècle avant J.C en cherchant le rapport qui existait entre la diagonale d'un carré et son côté.
Or son étude sur la musique avait conduit Pythagore à penser que « l'harmonie divine consiste en rapports numériques de nombres entiers ». Autrement dit pour Pythagore toute grandeur était un quotient de deux nombres entiers.
Hélas, $\sqrt{2}$ a mis en défaut cette théorie Pythagoricienne : on ne pouvait pas l'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.. $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde « rationnel » imaginé par Pythagore : c'est pourquoi Pythagore a nommé les nombres de ce type des « irrationnels ».
Vous allez à votre tour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, vous allez suivre un raisonnement dit « par l'absurde ».

La démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur le fait qu'un entier est soit pair, soit impair.

A l'époque où l'on ne connaissait que les entiers et les fractions d'entiers, cette question était difficile. Quelle est la fraction dont le carré est égal à 2 ? En fait, ces recherches étaient vaines car il n'existe pas de fraction d'entiers dont le carré est égal à 2. Voici la preuve trouvée par les Pythagoriciens :

Supposons que d soit une fraction alors on peut écrire : $d = \frac{a}{b}$ où a et b sont deux nombres premiers entre eux.(on considère la fraction irréductible càd simplifiée au maximum)
On a donc : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2\ b^2$. Par conséquent a^2 est pair et donc a aussi.
On peut l'écrire $a = 2c$ où c est un entier. Ainsi : $4c^2 = 2\ b^2$ soit $2c^2 = b^2$
Donc b^2 est pair, et b aussi.
Mais si a et b sont pairs tous les deux, alors la fraction $\frac{a}{b}$ n'était pas irréductible au départ. On a donc une contradiction avec la conjecture de départ. Donc cette conjecture est fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction !
C'est un irrationnel (contraire à la raison !)