Une suite de chiffres

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : Bernas Raphaël, Coeugnet Benoit et Bensaada Idriss, classe de 2nde

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignant(s) : Didier Missenard, Helène Cochard, Denis Julliot

Chercheur(s) : Romain Deseine

Sommaire

1 Presentation du sujet

On nous a soumis une liste de sujet et parmi ceux-là, un nous a interressé par sa simplicité visuel mais sa complexité mathématique.
Notre sujet :
Pouvez-vous expliquer pourquoi $\frac{1}{81} = 0{,}12345679012345679\ldots$?
Nous nous sommes d'abord demandé si cette suite est infinie ?

2 Dans un sens : La divsion Euclidienne

Nous avons voulu montrer avec la division Euclidienne que la suite était infinie. On fait la division euclidienne de deux entiers naturels m et n, on va alors avoir possiblement autant de restes, donc d'étapes que de nombres compris entre 0 et n. Donc, on va retrouver un même reste au bout de maximum n+2 étape. Donc en principe, si un reste se répète, on sait alors qu'on va retrouver tous les suivants. Ici on prend n=81 : on retrouve 19 après 9 étapes.

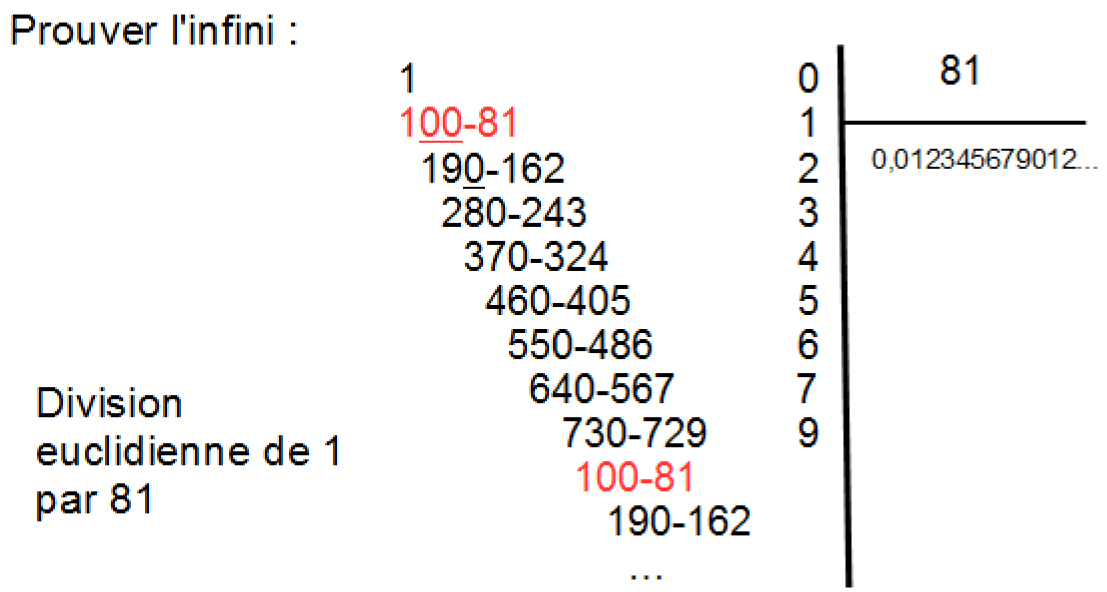

FIGURE 1 – Division Euclidienne

0,12345679012345679012345679... et cela continue donc infiniement.

3 Dans l'autre sens : Créer ses propres suites

Nous avons voulu essayer de résoudre cette équation qu'y nous avait traversé l'esprit :

$$\frac{1}{81} = 12345679x$$

$$\frac{1}{81} * \frac{1}{12345679} = x$$

$$x = \frac{1}{999999999}$$

On a donc découvert le quotient X présenté ci-dessus et nous avons voulu l'utiliser pour créer nos propres suites.
On a voulu créer la suite 0,121212121212...

$$\frac{1}{999999999} * 12 = 0,0000000012...$$

On observe donc que ce quotient ne nous conduit pas au résultat recherché pour créer nos propres fractions.
Si on prend 12, on compte 2 chiffres, ce qui nous donne la fraction

$$\frac{12}{99} = 0,121212...$$

C'est bien ce que nous cherchions à obtenir.
Nous avons décidé d'inventer un algorithme pour créer ses propres fractions.

Etape 1 : Choisir un nombre.

Etape 2 : compter le nombre de chiffres présent dans votre nombre.

Etape 3 : Mettre votre nombre sur autant de 9 qu'il y avait de chiffres dans votre nombre.

En généralisant, on peut obtenir la fraction explicite suivante :

$$\frac{10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + ... + a_0}{10^n * 9 + 10^{n-1} * 9 + 10^{n-2} * 9 + ... + 9} = 0, a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0 a_n ...$$

-> Voir "démonstration" partie 4.2

4 L'Extension du sujet

Nous avons pu faire plusieurs remarques que nous n'avons pas pu démontrer
1ère remarque :
Dans la division 1/81, la différence entre deux restes est de 9. Les restes obtenus sont : 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64 et 73.
C'est à dire que sur tous nos restes obtenus après la division euclidienne, lorsque l'on soustrait le nouveau reste au précédent, on a une différence de 9. On peut donc dire que chaque reste se représente par la formule : 1 + 9z. Pourquoi 1 ? Car le premier reste est 1.

2ème remarque :
On a 10r = 81q + r' alors selon cette remarque :

$$q = \frac{12345679}{999999999} + \frac{1}{9}x$$

Avec x l'étape, r et r' deux restes successif.

4.1 Observation sur les suites de restes (voir 1ère remarque)

On a voulu montrer que R2 - R1 soit un nouveau reste à qui on soustrait le précédent = 9 Sauf que dans les équations que l'on a observé R2 s'exprimait en fonction de R3, qui lui-même s'exprimait en fonction de R4 et ainsi de suite. Nous avons donc déduit qu'il s'agissait de la mauvaise voie pour démontrer.
Peut-on vraiment démontrer cette remarque ?
En principe non, car le reste 1 que l'on obtient est précédé par 73, or 1 - 73 n'est pas égal à 9. On observe que la remarque d'origine est faussée, mais on pourrait exploiter une autre remarque se basant sur le fait que 73 + 9 - 81 = 1, donc on aurait toujours notre +9.

4.2 Extension du sujet : Explication des raisons d'une suite par des sommes infinies

Pour démontrer la fraction et l'algorithme vue dans la partie 3, nous prenons l'exemple d'un nombre à 3 chiffres : abc. On veut donc montrer que

$$0,abcabc... = \frac{abc}{999}$$

Interressons-nous dans un premier temps à 0,001001... avec n fois le 1 qui peut s'écrire aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i}$$

$a^{n+1} - 1 = a^{n+1} + a^n + ... + a^n - a^{n-1} - \ldots - a - 1$
$= (a^{n+1} - a^n) + (a^n - a^{n-1}) + \ldots + (a - 1)$
$= (a–1)(a^n + 1 + a^{n-1} + \ldots + 1)$
$(a^{n+1} - 1)/(a - 1) = a^n + a^{n-1} + \ldots + 1$

$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Utilisons notre exemple : $\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i} = \sum_{i=0}^{n} 10^{-3i}$-1
$= \frac{10^{-3(n+1)}-1}{10^{-3}-1}$ -1

$= \frac{10^{-3(n+1)}-1-(10^{-3}-1)}{10^{-3}-1}$

$= \frac{10^{-3}(10^{-3n}-1)}{10^{-3}-1}$

$= \frac{10^{-3n}-1}{1-10^3}$

$= \frac{1-10^{-3n}}{10^3-1}$

$= \frac{1-10^{-3n}}{999}$
Si n tend vers l'infini, on a $\frac{1}{999}$
Or nos suites sont infinies, on avait donc : $\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i}$-> $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-3i}$
On peut mulltiplier par abc afin d'obtenir la suite 0,abcabc...

On peut donc conclure que la façon de créer une suite est justifiée.

5 Conclusion

On a donc réussi à trouver une façon de créer des fractions et on l'a justifié. On a aussi réussi à valider l'écriture décimale infinie de 1/81. Mais il est encore possible d'essayer de démontrer les remarques que l'on a faite et il est fort probable que en démontrant ces remarques, on puisse trouver la liaison entre 9 et l'entièreté du sujet.