Math en Jeans : Un Nouvel Opérateur

Paul CHEVALIER, Marie DURIVAUX, Emma SANDOVAL, Alexandre PERE

2017-2018

1 Enoncé

Monsieur et madame Jonhson ont créé un nouvel opérateur $\circ$, défini par trois relation tel que pour tout entier a et b:

$$a \circ a = a + 2$$

$$a \circ b = b \circ a$$

$$\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}$$

On se pose plusieurs questions sur le résultat de $a \circ b$: le nombre est-il toujours entier? Toujours positif? Peut-on calculer $a \circ b$ pour tout a et b?

2 Formule de base

On cherche une formule permettant de calculer $a \circ b$. On a déduit des trois relations précédentes que $b \neq 0$ et on pose $b > a$ et $b \neq ka$,.

$$a \circ b = a \circ (a + b - a) = \frac{a \circ (a+b-a)}{a \circ (b-a)}(a \circ (b-a))$$

On utilise la relation : $\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}$ qui nous permet de "simplifier" par a (Si $b - a \neq 0$):

$$\begin{aligned} a \circ b &= \frac{a+b-a}{b-a}(a \circ (b-a)) \\ &= \frac{b}{b-a}(a \circ (b-a)) \end{aligned}$$

Cette formule est appliquable sur n'importe quel couple a et b, ainsi on différencie plusieurs cas :

Si b est multiple de a, alors en répétant l'utilisation de la formule on obtient un produit de fractions et de $a \circ a$, on trouve donc $a \circ b$ en résolvant le produit.

Si $b - a < a$, alors on inverse les rôles de a et de b dans la formule et on répète l'opération.

Si $b - a = 1$, alors on utilise $a \circ 1$.

Cette formule nous servira de base pour toutes les autres démonstrations.

3 $a \circ 1$

Soit $a > 1$:

$$
\begin{aligned}
1 \circ a &= \frac{a}{a-1}(1 \circ (a-1)) \\
1 \circ a &= \frac{a}{a-1}\frac{a-1}{a-2}(1 \circ (a-2)) \\
1 \circ a &= \frac{a}{a-1}\frac{a-1}{a-2}\frac{a-2}{a-3}\frac{a-3}{a-4}(1 \circ (a-4)) \\
1 \circ a &= \frac{a}{a-4}(1 \circ (a-4))
\end{aligned}
$$

On répète ainsi n fois l'opération, avec $a - n = 1$, on a alors :

$$\frac{a}{a-n}(1 \circ (a-n)) = \frac{a}{1}(1 \circ 1) = a(1+2) = 3a$$

4 Caractéristiques de l'opérateur

Après quelques essais, il semble que: - Pour a et b entiers, $a \circ b$ est entier. - Pour a et b positif, $a \circ b$ est positif. - Pour a ou b négatif, $a \circ b$ peut être positif ou négatif.

Au premier abord, les résultats trouvés semblent suivre une progression incohérente.

5 Tableau

On a ainsi construit un tableau des différentes valeurs de $a \circ b$ en fonction de a et de b.

b \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	6	4	18	8	30	12	42	16	54	20
3	9	18	5	36	45	10	63	72	81	90
4	12	8	36	6	60	24	84	12	108	40
5	15	30	45	60	7	90	105	120	135	14
6	18	12	10	24	90	8	126	48	162	60
7	21	42	63	84	105	126	9	168	189	210
8	24	16	72	12	120	48	168	10	216	80
9	27	54	15	108	135	30	189	216	11	270
10	30	20	90	40	14	60	210	80	270	12

On remarque différentes caractéristiques du tableau :

- les valeurs présentent une symétrie de part et d'autre des valeurs de $a \circ b$ lorsque $a = b$, due à la commutativité de l'opérateur.

- les premières lignes et colonnes présenent des croissances cycliques aisément repérables : $1 \circ a = 3a$, $2 \circ a = 2a \ / \ 6a$. Néanmoins, ces cycles se répètent sur chaque ligne/colonnes, "modulo" b. On a ainsi :

$$1 \circ a = 3a$$

,

$$2 \circ a = 2a/6a$$

$$3 \circ a = 9a/9a/\frac{5a}{3}$$

$$4 \circ a = 12a/4a/12a/\frac{3a}{2}$$

$$5 \circ a = 15a/15a/15a/15a/\frac{7a}{5}$$

On peut voir que les nombres permettant de trouver $a \circ b$ en multipliant a sont toujours des multiples de b.

6 Conjectures

L'interprétation du tableau nous permet de formuler plusieurs conjectures sur des formules exprimant $a \circ b$ en fonction de la parité de a et b:

1- $1 \circ a = 3a$, cette conjecture à été démontrée plus haut;

2- Si a et b ont pour seul diviseur commun 2 : $a \circ b = ab$

3- Si b est un multiple de a, tel que $b = ka$ (avec k entier naturel) : $a \circ ka = k(a \circ a) = k(a + 2)$

4- Si a et b sont premiers entre eux : $a \circ b = 3ab$

7 Démonstration d'une formule universelle

L'étude du tableau nous a poussé à formuler plusieurs conjectures, qui ont comme points communs l'utilisation de a, b et de leurs diviseurs ou multiples communs. L'étude de l'opérateur et d'une formule de base a mis en évidence un système de calcul apparenté à l'algorithme d'Euclide. On a donc poursuivi le raisonnement dans ce sens.

Le raisonnement s'effectue en utilisant la formule de base
$a \circ b = \frac{b}{b-a}(a \circ (b - a)$,
avec à chaque fois a et b des entiers quelconques différents de 0 et $b > a$.
On commence avec: $b > a$

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}(a \circ (b - a))$$

Puis on continue le raisonnement, on réutilise la formule sur $(a \circ (b - a))$:

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}\frac{b-a}{b-2a}(a \circ (b - 2a))$$

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}\frac{b-a}{b-2a}\frac{b-2a}{b-3a}(a \circ (b - 3a)$$

Et ainsi de suite, on répète l'opération N1 fois avec N1 tel que $(b-N1a) < a$, on obtient donc:

$$a \circ b = \frac{b}{b-N1a}(a \circ (b - N1a))$$

On définit un nouveau couple $a > C$, tel que $C = (b - N1a)$, sur lequel on réitère l'opération:

$$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{a-C}(C \circ (a - C)$$

$$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{a-C}\frac{a-C}{a-2C}(C \circ (a - 2C)$$

Même raisonnement, on continue N2 fois jusqu'à $(a - N2C) < C$, on obtient donc :

$$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{a - N2C}(C \circ (a - N2C)$$

On définit le couple $C > D$, avec $D = (a - N2C)$:

$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{D}\frac{C}{C-D}(D \circ (C - D)$

$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{D}\frac{C}{C-D}\frac{C-D}{C-N3D}(D) \circ (C - N3D)$

Là encore, on peut continuer N3 fois jusqu'à définir le couple $D > E$ avec $E = (C - N3D)$ On obtiendra après N4 opérations:

$a \circ b = \frac{b}{C}\frac{a}{D}\frac{C}{C-D}\frac{C-D}{E}\frac{D}{D-N4E}(E \circ (D - N4E))$

Dans toutes ces formules, les fractions peuvent se simplifier :

$a \circ b = \frac{b}{C-N3D}\frac{a}{D-N4E}(E \circ (D - N4E))$

On remarque une manière de procéder caractéristique de l'algorithme d'Euclide: au bout d'un certain nombre de répétitions, on obtiens une grande fraction dont les termes se simplifient toute les deux fractions, comme on l'a vu. Or on s'aperçoit en pratique que le dénominateur est égal à $PGCD(a; b)^2$ et que dans l'équation, l'opération "rond" est égale à

$PGCD(a; b) \circ PGCD(a; b) = PGCD(a; b) + 2$

On aura donc : $a \circ b = \frac{ab}{PGCD(a;b)^2}(PGCD(a; b) + 2)$

8 Correspondance avec les conjectures

Comme on l'a démontreé, $a \circ b = \frac{ab}{PGCD(a,b)^2}(PGCD(a, b) + 2)$

Et cette formule coincide avec les conjectures précédemment évoquées grâce au tableau:

1- $1 \circ a = 3a$
PGCD(1;a)=1 donc :
$1 \circ a = \frac{1a}{PGCD(1,a)^2}(PGCD(1, a) + 2) = \frac{a}{1}(3) = 3a$

2- Si a et b ont pour seul diviseur commun 2 : $a \circ b = ab$
PGCD(a,b)=2

$a \circ b = \frac{ab}{PGCD(a,b)^2}(PGCD(a,b)+2) = \frac{ab}{2^2}(2+2) = 4\frac{ab}{4} = ab$

3- Si b est un multiple de a, tel que $b = ka$ (avec k entier naturel) : $a \circ ka = k(a \circ a) = k(a+2)$

PGCD(a,ka)=a

$a \circ ka = \frac{aka}{PGCD(a,ka)^2}(PGCD(a,ka)+2) = \frac{ka^2}{a^2}(a+2) = k(a+2)$

4- Si a et b sont premiers entre eux : $a \circ b = 3ab$

PGCD(a;b)=1

$a \circ b = \frac{ab}{PGCD(a,b)^2}(PGCD(a,b)+2) = ab(1+2) = 3ab$