Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Plan de Table

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : Jean de Sainte Marie et Loïc Davalo, 1ère S

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignant(s) :

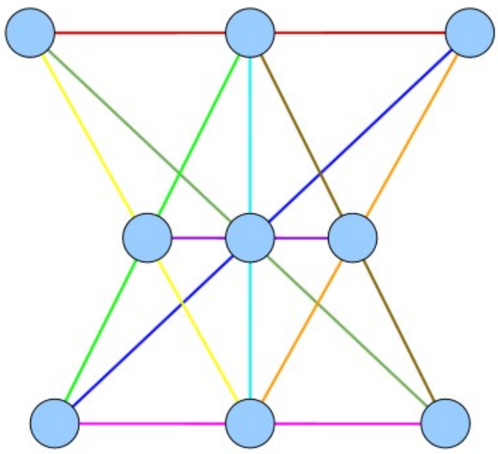

FIGURE 1 – Situation finale

Chercheur(s) :

1 Le Problème

Un maître d'hôtel, mathématicien amateur, a disposé 9 verres sur une table de réception de manière à ce qu'ils forment 10 alignements de 3 verres :

— Pouvez-vous trouver cette disposition ?
— Y a t-il plusieurs dispositions possibles ?
— Est-il possible d'avoir plus de 10 alignements ?

1.1 Une précision

Si on aligne tout les points on obtient 84 alignements (figure 2), on ne considère pas les alignements de plus de 3 verres.

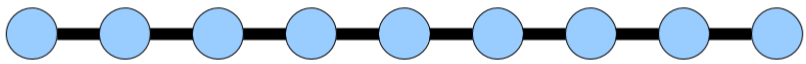

FIGURE 2 – 9 points alignés

2 Quelques relations

2.1 Une première relation

On considère les verres comme des points. Pour simplifier la visualisation.
On note A le nombre total d'alignement, ici $A = 10$
Et P le nombre de points, ici $P = 9$
Nous utiliserons le nombre d'alignement passant par un verre, $n1; n2; n3 \ldots nP$
Dans notre situation : **n1+n2+...+nP = 3A** car on a des alignements de 3 verres
Donc ici **n1+n2+...+n9 = 30**

2.2 Une deuxième relation

Soit un verre et K le nombre maximum d'alignements auxquels il peut appartenir si on considère un nombre impaire de points comme ici avec nos 9 points :

$$n \leq \frac{P-1}{2}$$

Donc ici :

$$n \leq \frac{9-1}{2} = 4$$

Comme on le voit sur cette figure :

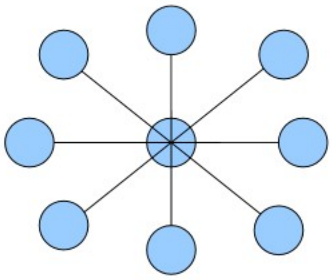

FIGURE 3 – Nombre maximum d'alignement pour un point

On a donc ici au maximum 9 verres dans 4 alignements donc $4 * 9 = 36$
et car $n1 + n2 + ... + nP = 3A$
alors $\frac{36}{3} = 12$ ici on a donc au maximum 12 alignements
Donc, pour tout point ayant K alignements, ce points est aligné avec tout les autres points.

On remarque aussi que la figure où tout les points sont dans le nombres maximum d'alignement, ici 12, ne peut pas exister car si tout les points sont aligné avec tout les autres, on a une ligne, et on a un alignement de plus de 3 verres.

3 Éléments de résolution

On dit qu'un point A est aligné avec un point B si A appartient à l'un des alignements auxquels appartient B.

3.1 Un point dans un alignement seulement

On cherche a savoir si il est possible d'avoir un ou plusieurs points inclus dans un alignement seulement pour obtenir 10 alignements ou plus.
Pour cela tous les points "à 4" doivent appartenir à l'alignement auquel appartient M. Or, il ne peut pas il y avoir plus de 3 points dans un alignement. Dans ce cas, il ne peut y avoir plus de 2 points "à 4".
Or

$$\sum_{n=0}^{9} n_i/3 = A$$

Or, $\frac{(4+4+1+6*3)}{3} = 9$
Cela signifie donc que, dans ce cas, il n'y aurait que 9 alignements. Donc, chacun des 9 points appartient au minimum à 2 alignements.

3.2 Alignement des points appartenant chacun à 4 alignements

On souhaite démontrer que les points appartenant à 4 alignements sont forcément alignés entre eux et qu'il en existe donc 3 au maximum.
Soit, 3 points non-alignés appartenant chacun à 4 alignements, A,B et C. On sait qu'il doivent appartenir chacun à l'un des alignements auxquels appartient chaque autre point, y compris eux-mêmes. Donc, il faut créer les alignements nécessaires à ce que les points "à 4" soient alignés entre eux. Soit 3 points D,E et F appartenant respectivement à [AB],[BC] et [AC]. Or, A,B et C ne sont pas alignés avec respectivement E,F et D. Il faut donc créer ces alignements. Soit 3 points, G,H et I, appartenant respectivement à [AE],[BF] et [CD]. Or, ces points ne sont alignés avec, respectivement, ni B, ni C ; ni A, ni C ; ni B, ni C. Or, il existe déjà 9 points. Or H,I et J sont les seuls points à ne pas être alignés avec tous les points "à 4", ils sont donc les seuls à pouvoir faire partie de nouveaux alignements avec A,B ou C. Donc, la seule configuration d'alignements possible est : ABD ; BCE ; ACF ; AEG ; BFH ; CDI ; AHI ; BGI ; CGH. Soit seulement 9 alignements (figure 4).

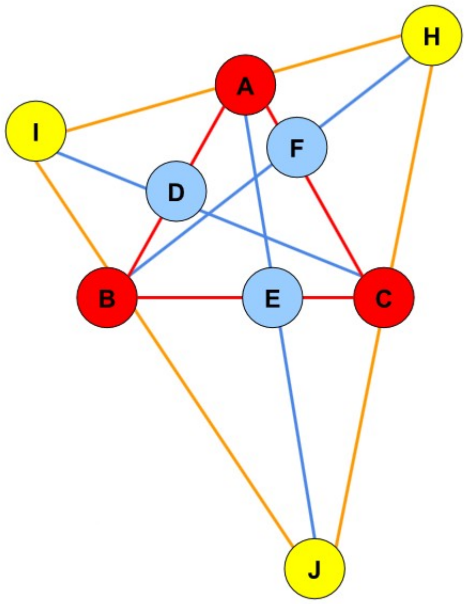

FIGURE 4 – Situation finale

La seule façon d'ajouter un ou plusieurs alignements serait d'aligner ensemble des points appartenant à strictement moins de 4 alignements chacun.
Ce qui amène la question : est-ce possible ?

3.3 Alignement de points "à 3"

Soit 3 points, A, B et C, alignés, n'appartenant chacun qu'à 3 alignements au maximum. Or, ils sont alignés, il ne reste donc que deux alignements supplémentaire pour chacun d'eux. Or, il faut au minimum 3 points appartenant chacun à 4 alignements pour qu'il y ai 10 alignements. Soit donc 3 autres points, D, E et F, appartenant chacun à 4 alignements. Les 3 derniers points disponibles appartiennent à 2, 3 ou 4 alignements chacun. Il y a alors plusieurs cas : Soit D, E et F alignés. Or, il ne peut pas y avoir plus de 3 points dans un alignement. Donc, A,B et C n'appartiennent pas à [DF]. Donc, chacune des combinaisons entre D,E,F etA,B,C sera un segment distinct, ce qui fait 6 segments. Or, dans ce cas, A, B et C appartiennent chacun à [AC] et à un alignement par point "à 4", ce qui fait 4 alignements. Or, A,B et C n'appartiennent qu'à 3 alignements. Donc, D, E et F ne sont pas alignés. Donc, on retrouve la situation précédente, avec la contrainte supplémentaire que les points "à 2" doivent devenir des points "à 3" en étant alignés. Or, ce n'est pas possible (figure 5)

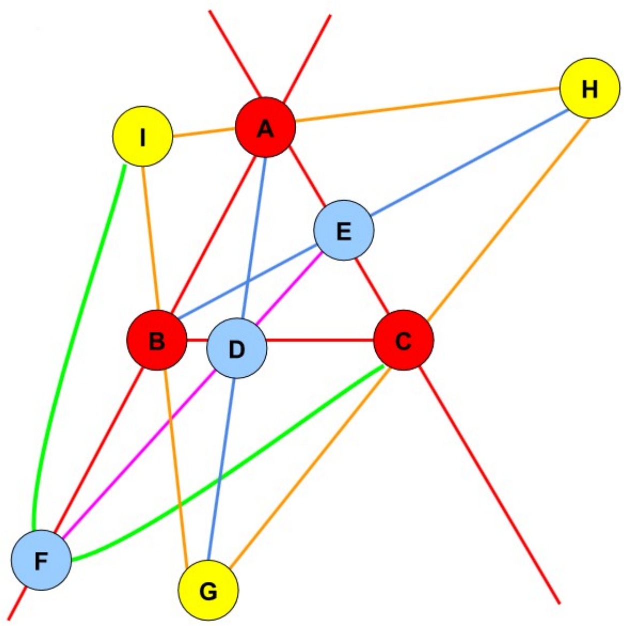

FIGURE 5 – Alignement impossible

Donc, les points "à 4" sont forcément alignés et sont donc au nombre de 3.

3.4 Unique construction possible

Soit A,B et C, trois points alignés. Ce seront les points par lesquels passeront 4 alignements chacun. Soit D,E,F,G,H et I, 6 autres points, par lesquels passeront 3 alignements chacun. Or, A,B et C appartiennent à 4 alignements chacun. Donc, il existe 3 segments sans points communs auxquels appartiennent respectivement 1,B et C. Soit $A \in [HE]$, $B \in [DI]$ et $C \in [FG]$. Or, B doit appartenir à des alignements communs avec E,F,G et H. Or, ce sont les seuls points à ne pas déjà appartenir à un alignement commun avec B. Soit, donc, $B \in [HF]$ et $B \in [EG]$. Donc, E et F sont de l'autre côté de l'axe (AC) par rapport à G et H, respectivement. Il y a alors 2 possibilités : soit $\vec{EA} = k\vec{AH}$, soit $\vec{EA} = -k\vec{AH}$, de même pour C,F et G. Or, D et I doivent appartenir chacun à un alignement commun avec A et un avec C. Or, seuls E et H n'appartiennent à aucun alignements communs avec D,I et C et seuls F et G n'appartiennent à aucun alignements communs avec D,I et A. Soir, donc, $D \in [EC]$ et $D \in [FA]$ et $I \in [HC]$ et $I \in [GA]$. Or, D appartient à [EC] et [FA] si et seulement si E et F sont du même côté de l'axe (AC). Or, H et G sont de l'autre côté de l'axe (AC) par rapport à F et E, respectivement. Donc, E et H, ainsi que F et G sont opposé par l'axe (AC). La seule construction possible, transformation affines incluses, est donc la figure 6.

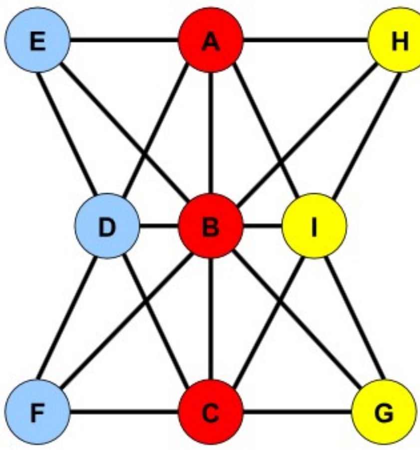

FIGURE 6 – La seule figure ?

4 Conclusion

Ainsi, dans les limites du problèmes — 9 verres assimilables à des points et un minimum de 10 alignements — nous avons démontré qu'il existait une seule figure (transformations affines incluses) remplissant toutes les conditions. Celle-ci est construite à partir de 3 points "à 4", alignés, puisqu'il s'agit de la seule disposition possible.
Nous avons étudié quelques cas avec un nombre différent de points, mais les mêmes conditions. Lorsqu'il y a moins de 9 points, les différentes construction sont facilement démontrables et il y a souvent, pour un même nombre de points, plusieurs figures possibles. Nous n'avons pu nous penché que rapidement sur les cas avec plus de points et avec assez peu de résultats. Ce serait donc sans doute intéressant de s'y intéresser plus en détail.